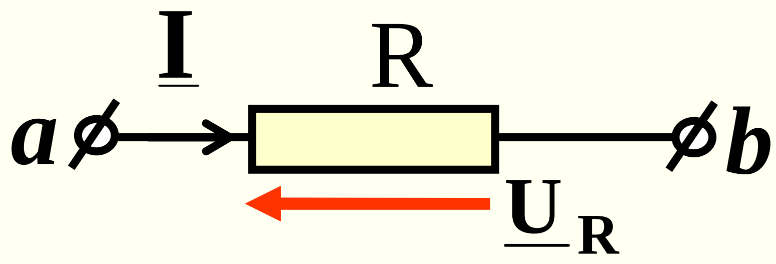
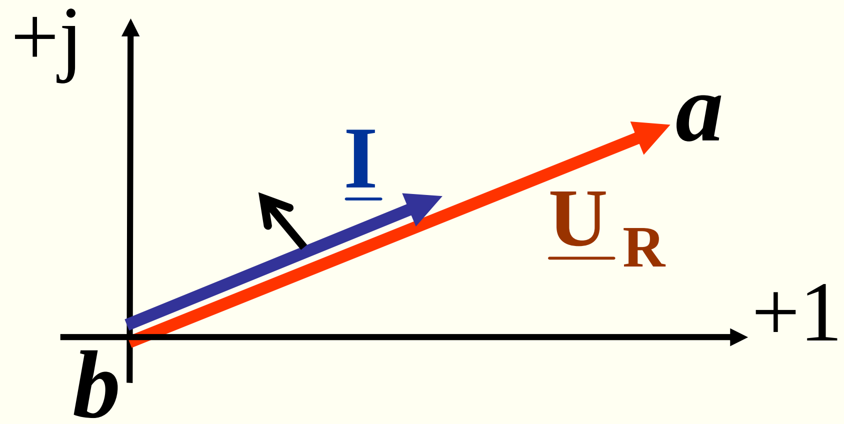
# 6 лекция

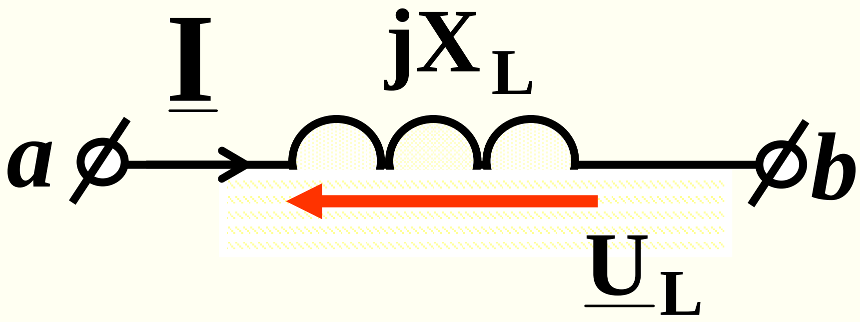
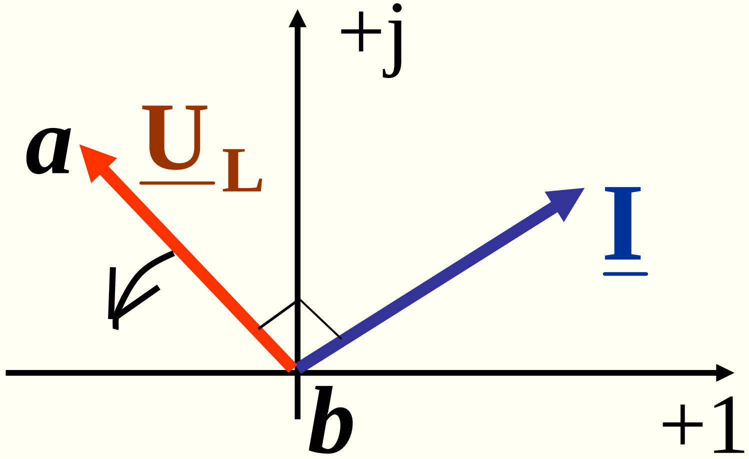
# ЗАКОН ОМА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

**Закон Ома в комплексной форме основан на символическом методе и справедлив для линейных цепей с гармоническими напряжениями и токами.**

**Этот закон следует из взаимосвязи между током и напряжением отдельных элементов цепи.**

| | |
|---|---|
| ***Резистивный элемент*** |   |
| ***Комплекс напряжения*** | $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$ |
| ***Вектора напряжения и тока*** |   |

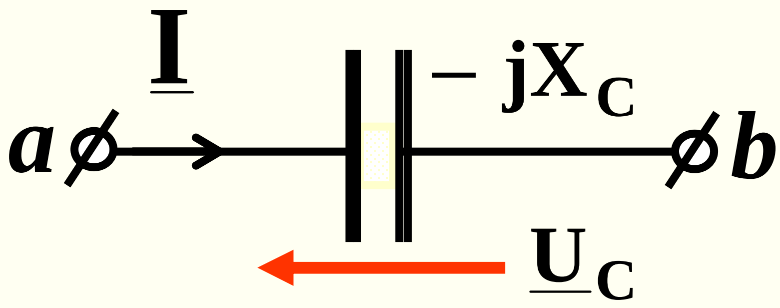
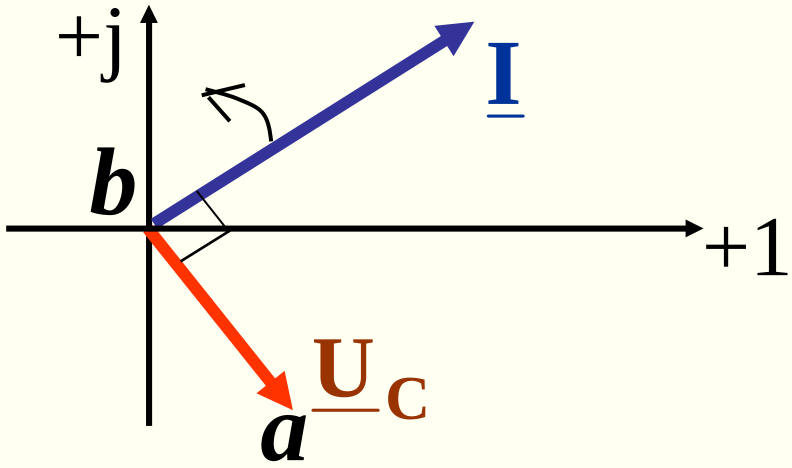
**На комплексной плоскости вектор напряжения резистивного элемента совпадает по направлению с вектором своего тока**

| | |
|---|---|
| ***Индуктивный элемент*** |   |
| ***Комплекс напряжения*** | $\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I}$ |
| ***Вектора напряжения и тока*** |   |

**На комплексной плоскости вектор напряжения индуктивного элемента опережает по направлению вектор своего тока на 90 градусов.**

**Где:**

$X_L = \omega L$ - **индуктивное сопротивление (Ом)**

| | |
|---|---|
| ***Емкостный элемент*** |  |
| ***Комплекс напряжения*** | $\underline{U}_C = -\dfrac{j}{\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$ |
| ***Вектора напряжения и тока*** |  |

**На комплексной плоскости**
**вектор напряжения**
**емкостного элемента**
**отстает по направлению**
**от вектора своего тока на 90 градусов.**

**Где:**

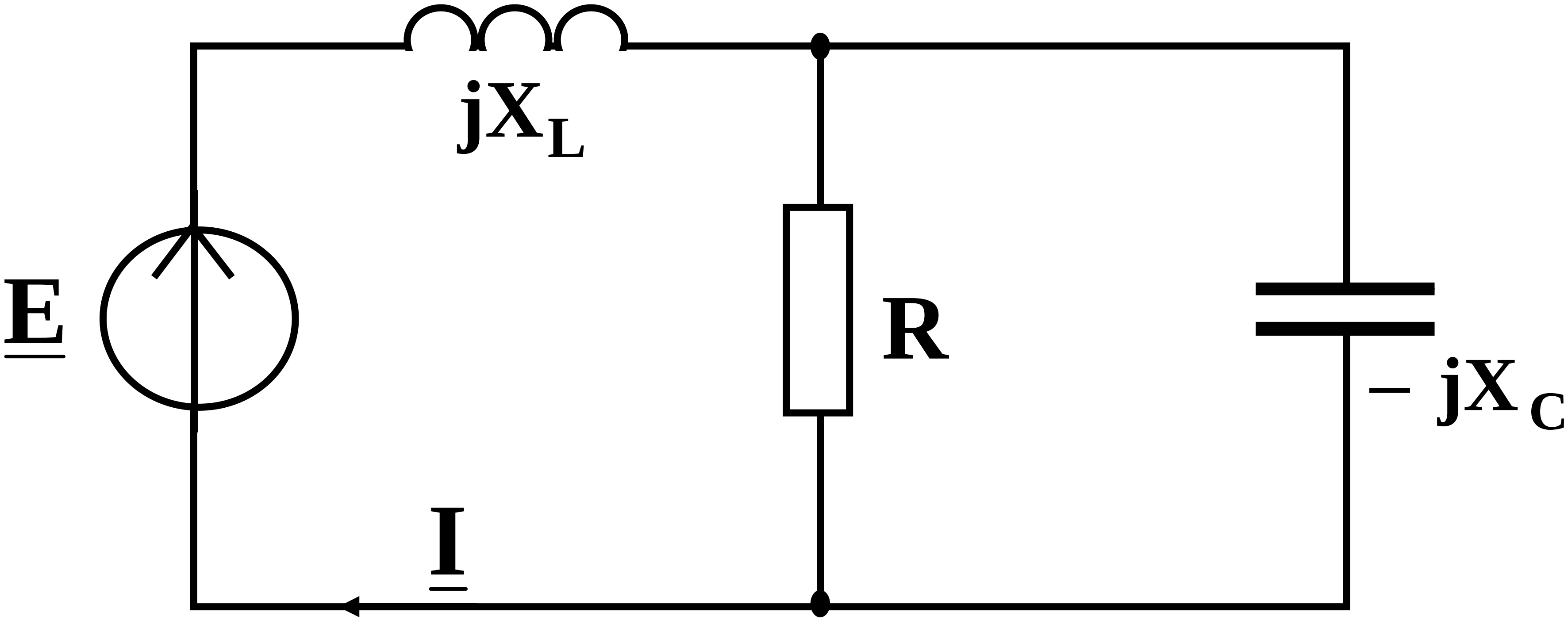
$$X_C = 1 / \omega C$$

**- емкостное сопротивление (Ом)**

**Закон Ома в комплексной форме для отдельных элементов аналогичен закону Ома для резистивного элемента при постоянном токе.**

**Для символического метода необходимо составить комплексную схему замещения с комплексными сопротивлениями и с комплексами действующих значений токов и напряжений**

# Например, комплексная схема замещения цепи:



## Эквивалентное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

## По закону Ома в комплексной форме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

## Где:

$$\underline{Z} = R_Э + jX_Э = Z \cdot e^{j\varphi}$$

– **эквивалентное комплексное сопротивление цепи (Ом);**

$$Z = \sqrt{R_Э^{\,2} + X_Э^{\,2}}$$

- **модуль сопротивления (Ом);**

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_Э}{R_Э}$$

**-аргумент (фаза)сопротивления (Град).**

# ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

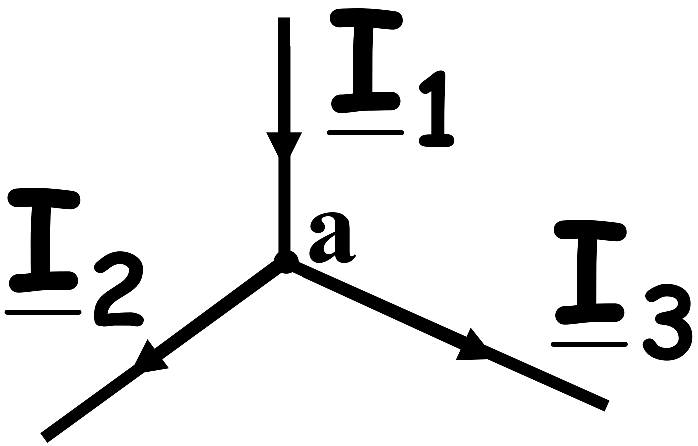
**Сложению и вычитанию гармонических токов и напряжений с одинаковой угловой частотой $\omega$ в законах Кирхгофа соответствует сложение и вычитание их комплексных величин**

# 1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

**Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексных значений токов равна нулю:**

$$\sum \pm \underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

# Например:




узел **а:**

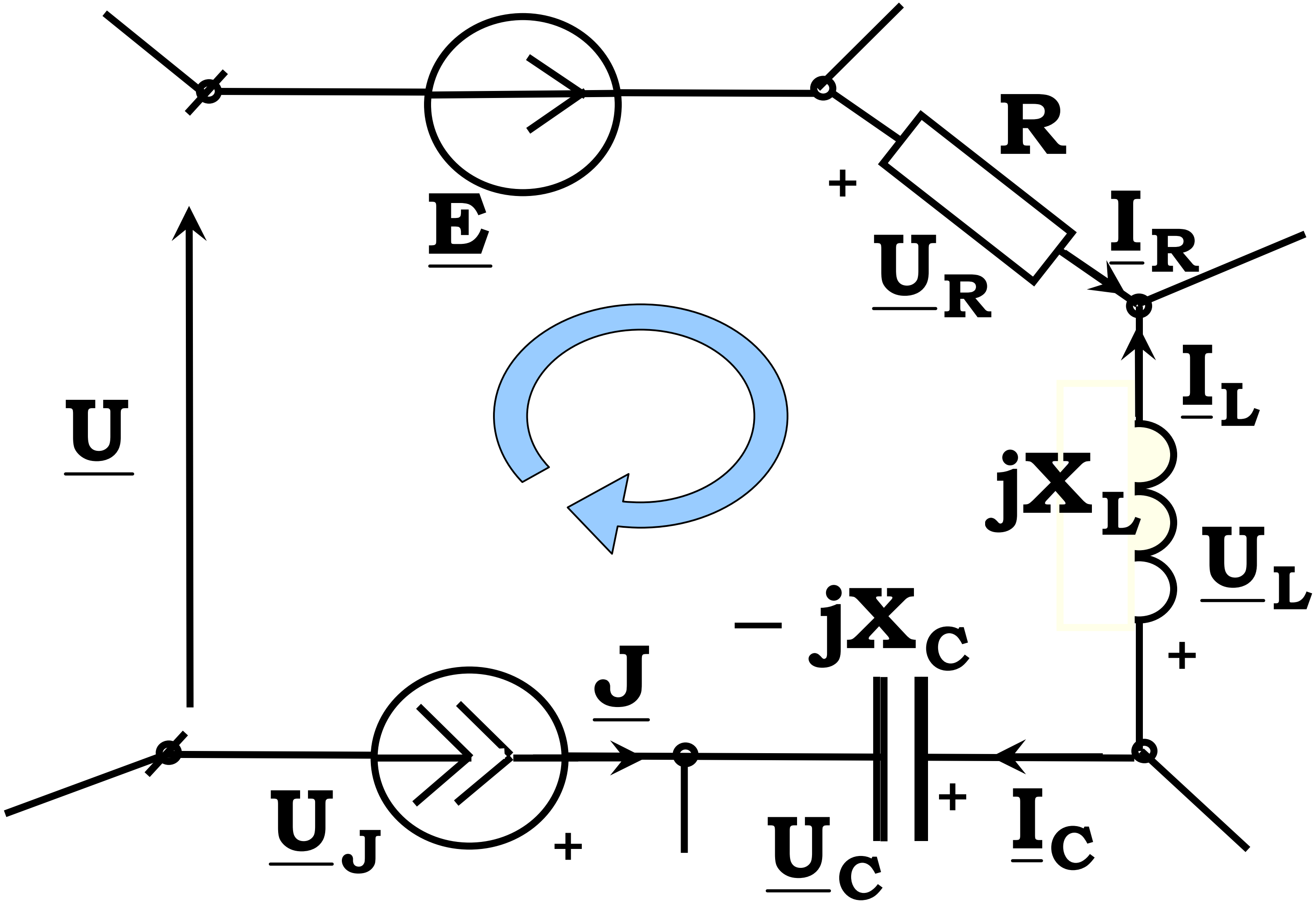
$$-\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_3 = 0$$

# 2. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

**Для любого контура комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексов напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС, напряжений на источниках тока и напряжений на разрывах контура:**

$$\sum \pm \underline{U}_n = \sum \pm \underline{E}_k + \sum \pm \underline{U}_{J_q} + \sum \pm \underline{U}_p$$

# Например:



$$\underline{U}_R - \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

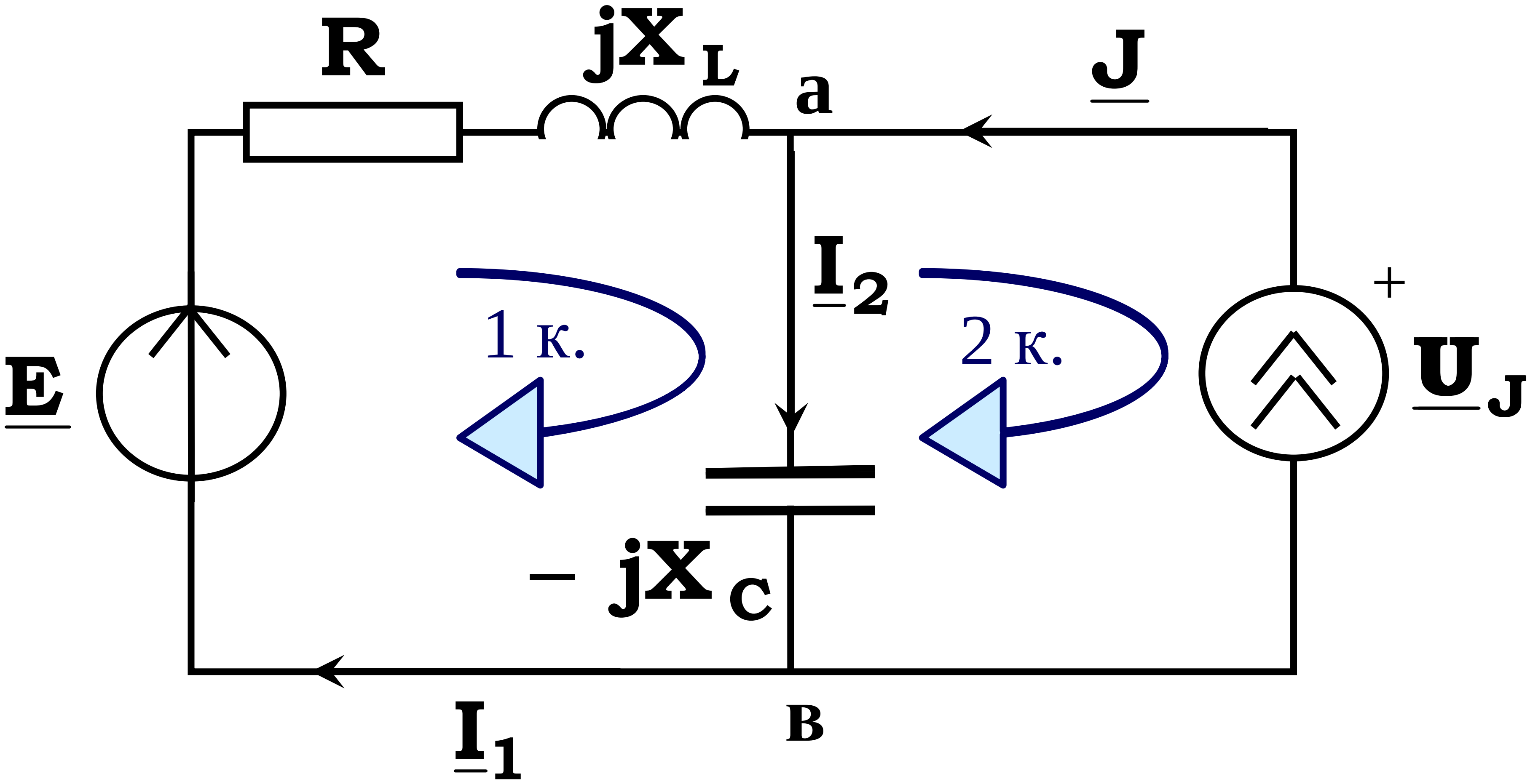
**или**

$$R\underline{I}_R - jX_L\underline{I}_L + (-jX_C)\underline{I}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

# 3. МЕТОД ЗАКОНОВ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

**Решая комплексные алгебраические уравнения, составленные по законам Кирхгофа в комплексной форме, можно определить комплексы токов и напряжений в комплексной схеме замещения цепи**

# Например:



$$n_у = 2$$

$$n_в = 3$$

$$n_1 = n_у - 1 = 1$$

$$n_2 = n_в - n_1 = 2$$

$$\mathbf{a:}\qquad -\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 - \underline{\mathbf{J}} = 0$$

$$\mathbf{1к:}\qquad (\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L)\cdot\underline{\mathbf{I}}_1 + (-j\mathbf{X}_C)\cdot\underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{E}}$$

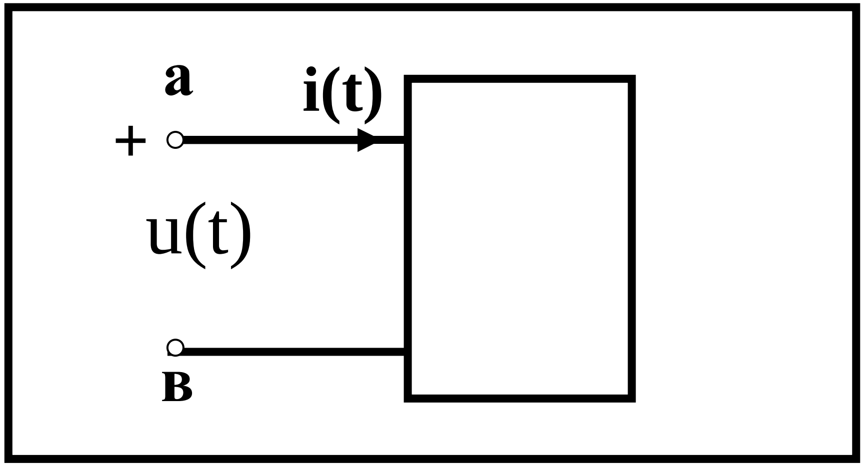
$$\mathbf{2к:}\qquad -(-j\mathbf{X}_C)\cdot\underline{\mathbf{I}}_2 = -\underline{\mathbf{U}}_J$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ (R + jX_L) & (-jX_C) & 0 \\ 0 & jX_C & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

**ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ИМЕЮТ ТАКОЙ ЖЕ ВИД КАК И ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ТОКАМИ, ПОЭТОМУ К КОМПЛЕКСНЫМ СХЕМАМ ПРИМЕНИМЫ ВСЕ ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ**

# МОЩНОСТЬ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

# Пассивный двухполюсник:




$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \alpha),\ (B)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \beta),\ (A)$$

# Мощность в функции времени:

$$P(t)=u(t)\cdot i(t)=$$

$$= \mathbf{P} - \mathbf{S}\,\mathbf{cos}(\mathbf{2}\omega\mathbf{t} + \alpha + \beta),\ (\mathbf{Вт})$$

$$P = UI\cos\varphi, \ (\text{Вт})$$

- **средняя** или **активная** мощность

$$S = UI, \ (\text{ВА})$$

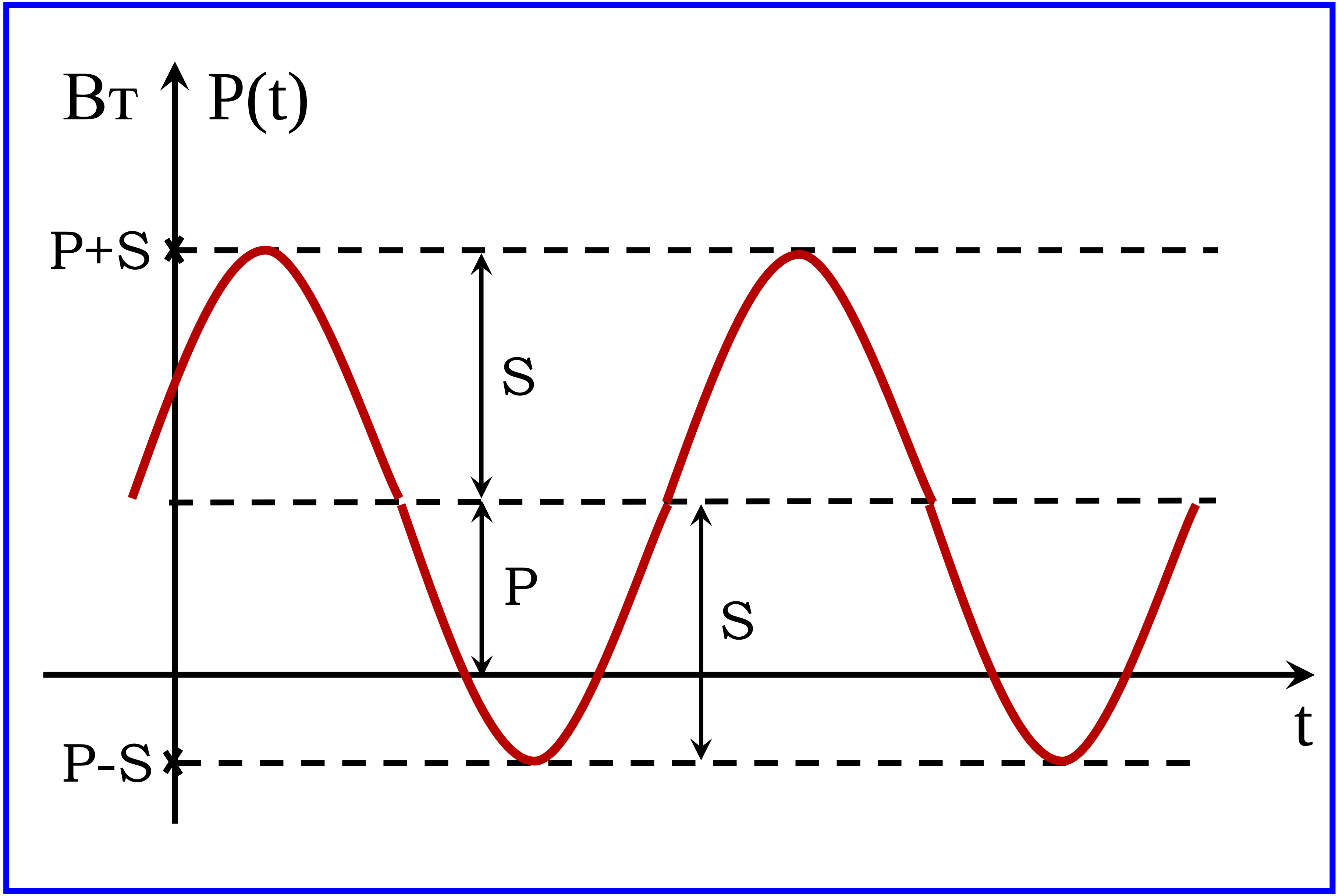
-**амплитуда** гармонической составляющей мощности или **полная** мощность

$$\varphi = \alpha - \beta, \text{ (град)}$$

- **угол сдвига фаз между напряжением и током**

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \le 1, \text{ т.е. } S \ge P$$

- **коэффициент мощности**


Вт
P(t)
P+S
S
P
S
t
P-S

Когда

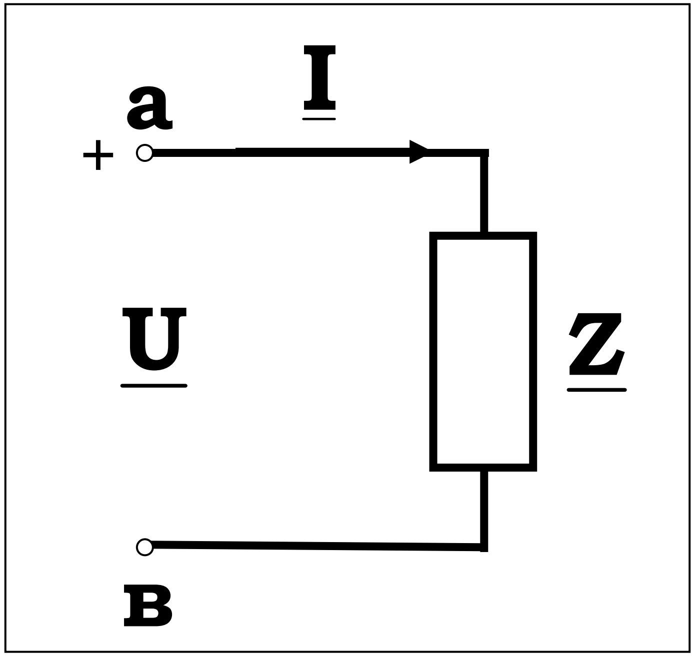
$$\boxed{P(t) > 0}$$

- энергия поступает в двухполюсник

$$\boxed{P(t) < 0}$$

- энергия поступает из двухполюсника во внешнюю цепь

# Пусть задано:




$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}, \ (В)$$

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}, \ (А)$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \ (Ом)$$

При $\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}$ находим

$$\underline{S} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}} = P + jQ, (BA)$$

- комплекс полной мощности

где $\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}$ -сопряженное значение тока

Т.к. $\boxed{\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}}$ , то

$$\boxed{\begin{gathered}\underline{S} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}} = (\underline{Z}\,\underline{I})\overset{*}{\underline{I}} = \\ = \underline{Z}I^2 = I^2R + jI^2X, (BA)\end{gathered}}$$

**Таким образом**

**активная мощность:**

$$\boxed{P = UI\cos\varphi = I^2R, \text{ (Вт)}}$$

**- это средняя мощность преобразования электромагнитной энергии в тепло или другую энергию**

# Реактивная мощность:

$$Q = UI\sin\varphi = I^2X, (вар)$$

- **пропорциональна максимальной энергии, запасаемой в электромагнитном поле:**

$$I^2X = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2(\omega L - 1/\omega C) = \omega\left(\frac{LI_m^2}{2} - \frac{CU_m^2}{2}\right)$$

# Полная мощность:

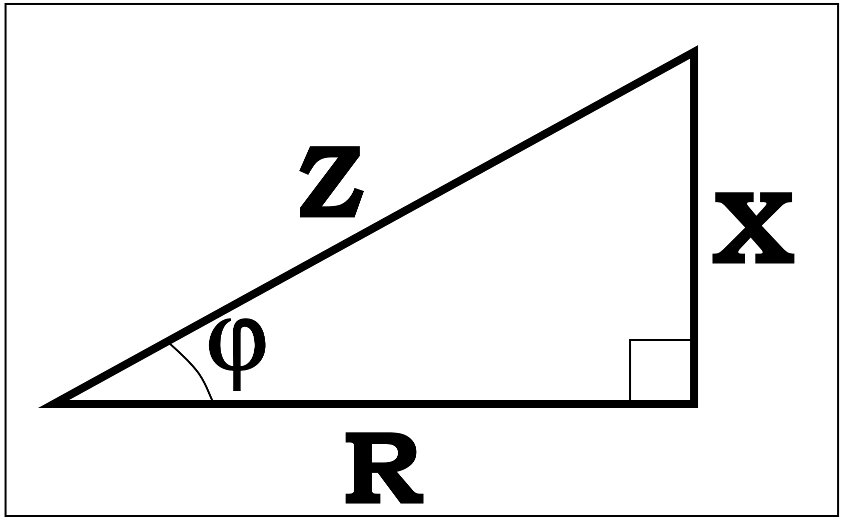
$$\boxed{S = UI = \frac{P}{\cos\varphi}, \text{ (ВА)}}$$

–это **максимально возможная активная мощность**

при $\boxed{\cos\varphi = 1}$

Можно изобразить подобные треугольники для пассивного двухполюсника:

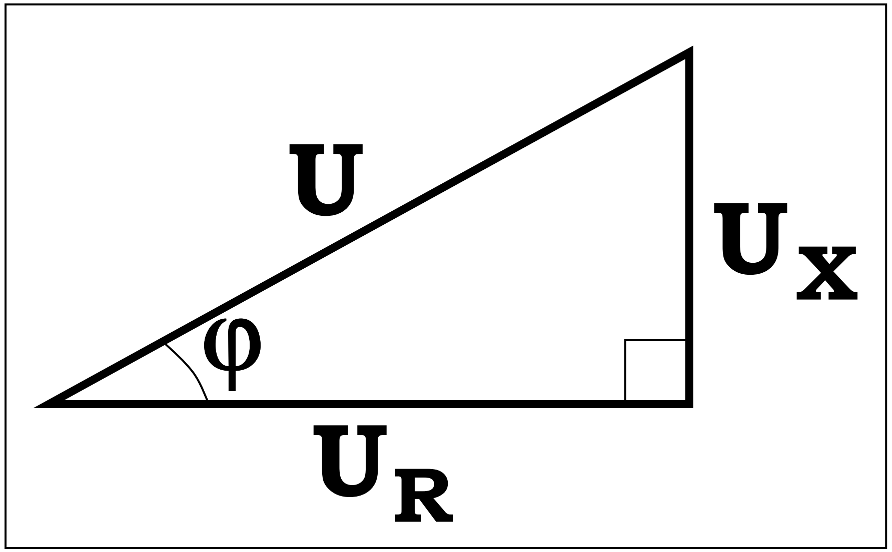
а) треугольник сопротивлений




$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

# б) треугольник напряжений

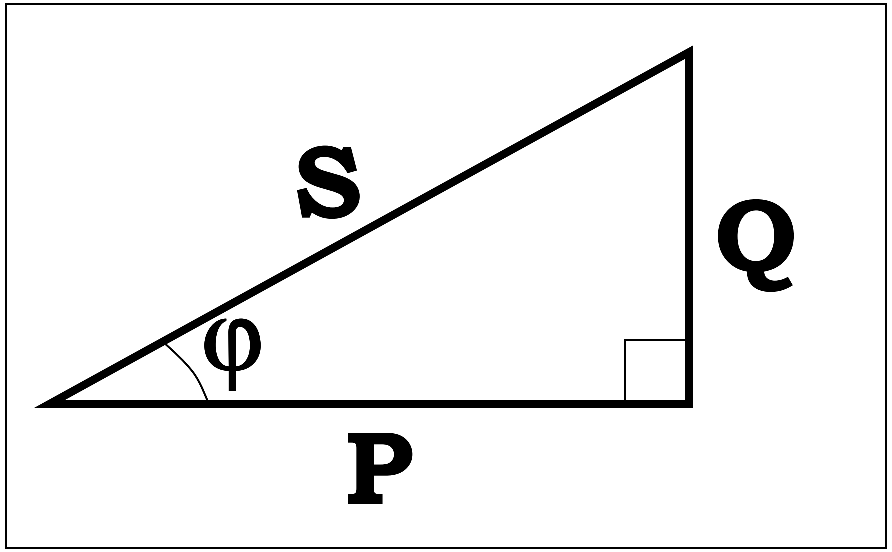



$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{U}_R^2 + \mathbf{U}_x^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{U}_R}{\mathbf{U}}$$

$$U_R = I \cdot R; \quad U_X = I \cdot X$$

# в) треугольник мощностей




$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

# ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ И ЛУЧЕВИЕ ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ

**Топографические** и **лучевые** векторные диаграммы используются при анализе и расчете цепей с синусоидальными напряжениями и токами.

Эти диаграммы **строятся совмещенными** на комплексной плоскости в **масштабах напряжения и тока**.

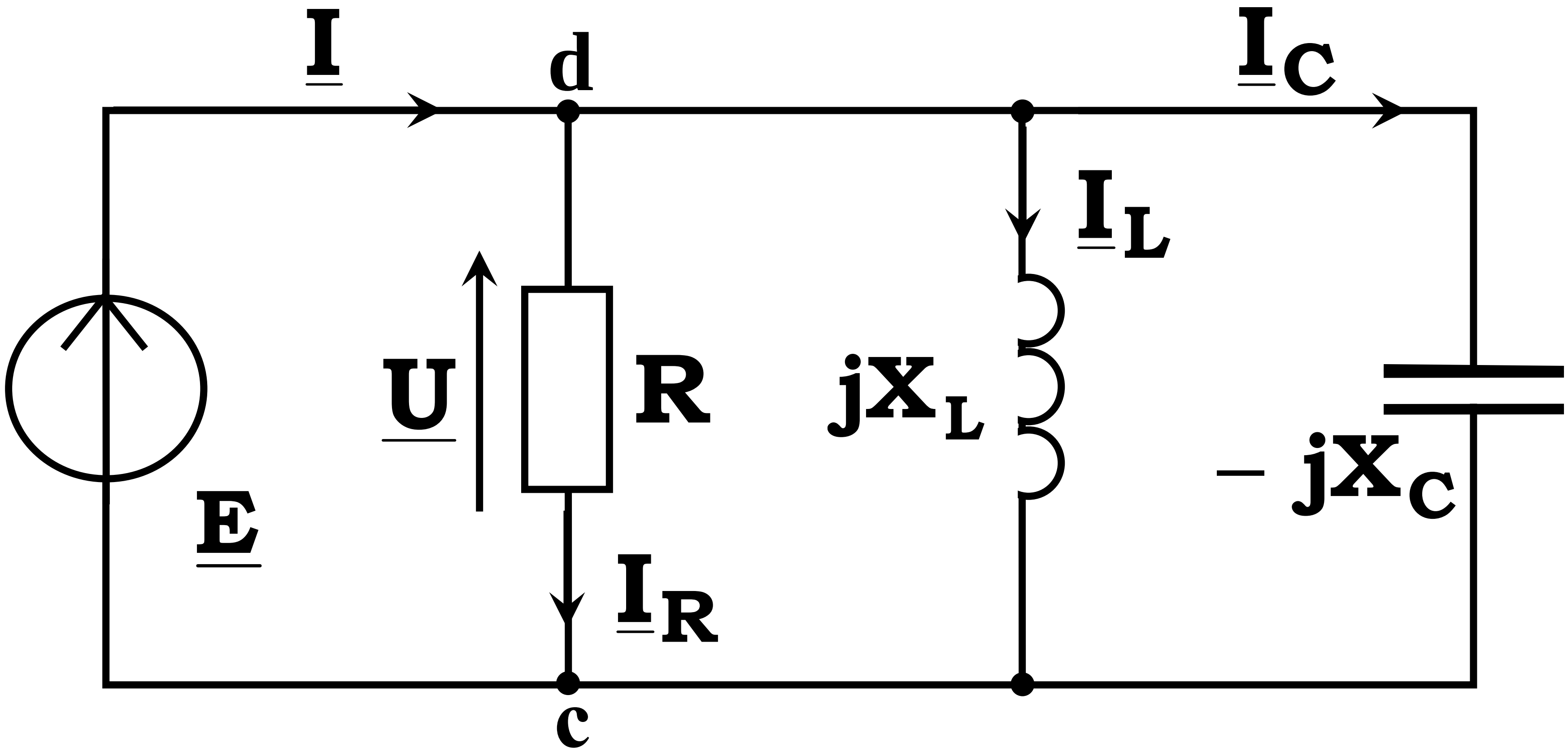
**Лучевые векторные диаграммы строятся для комплексов действующих значений токов, когда их вектора выходят из начала координат каждый под своим углом.**

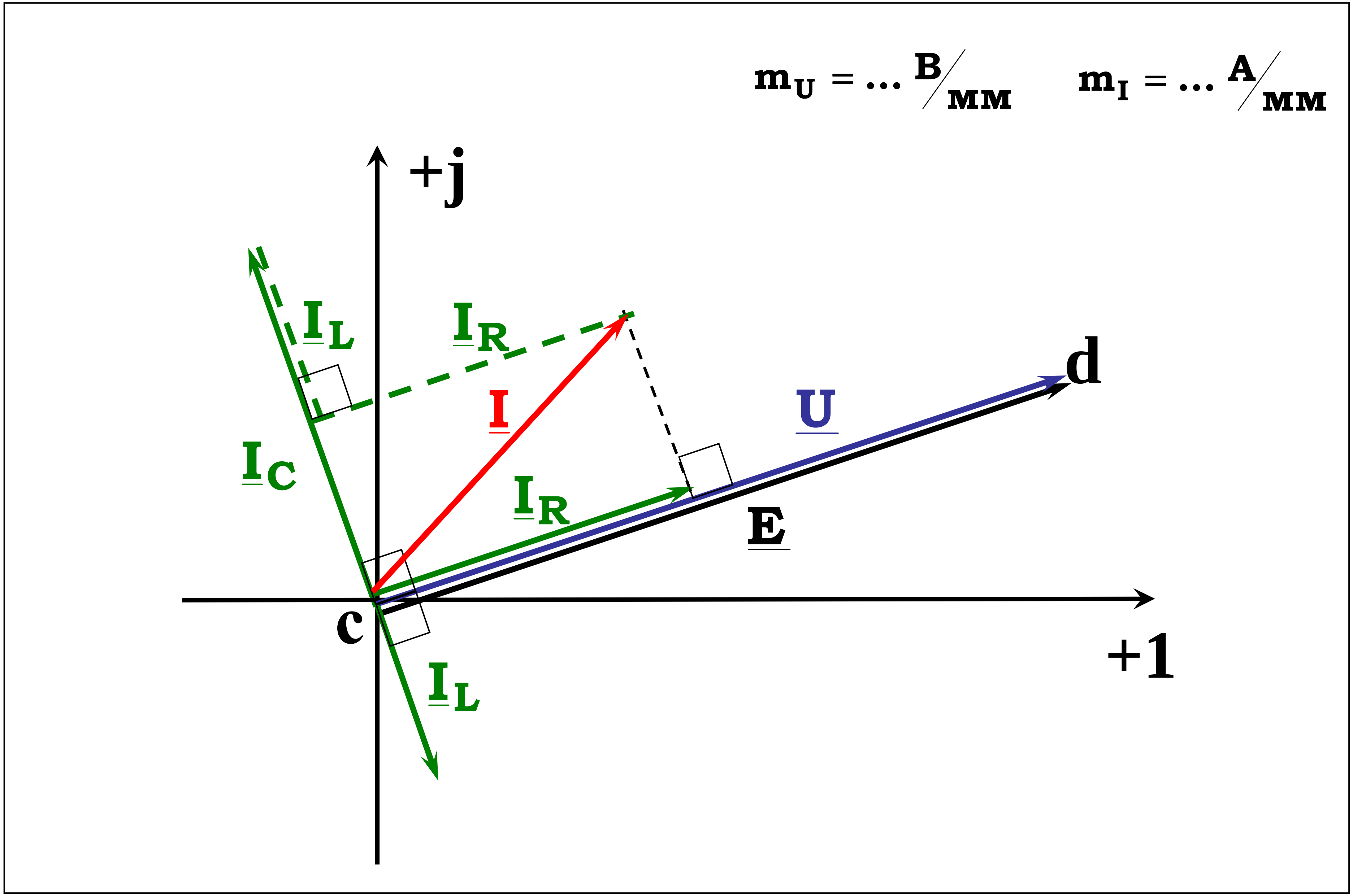
**Эти диаграммы используются для графической проверки первого закона Кирхгофа.**

**Топографические векторные диаграммы строятся для комплексов действующих значений напряжений, когда их вектора подстраиваются один к другому, образуя замкнутые контуры.**

**Эти диаграммы используются для графической проверки второго закона Кирхгофа**

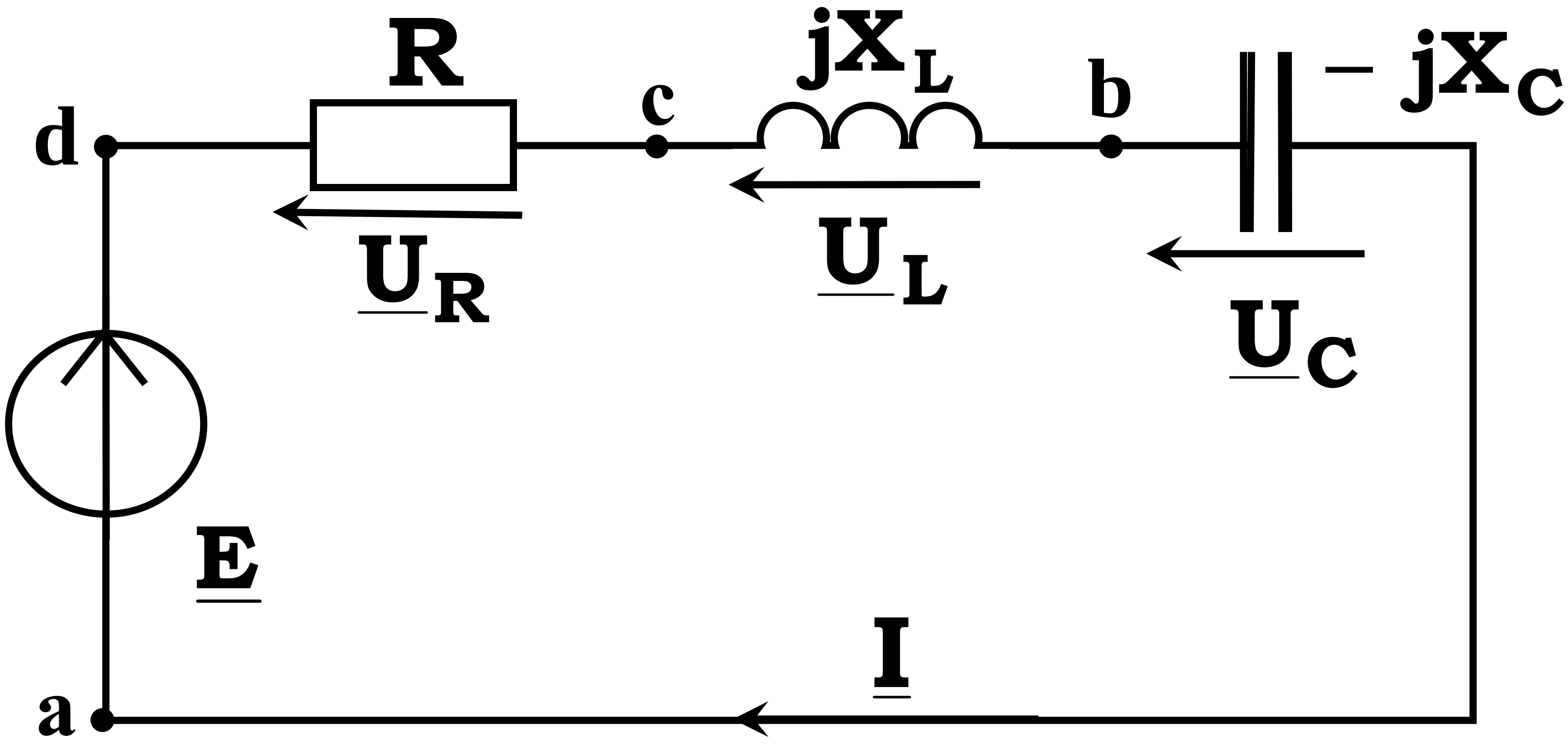
# Пример 1

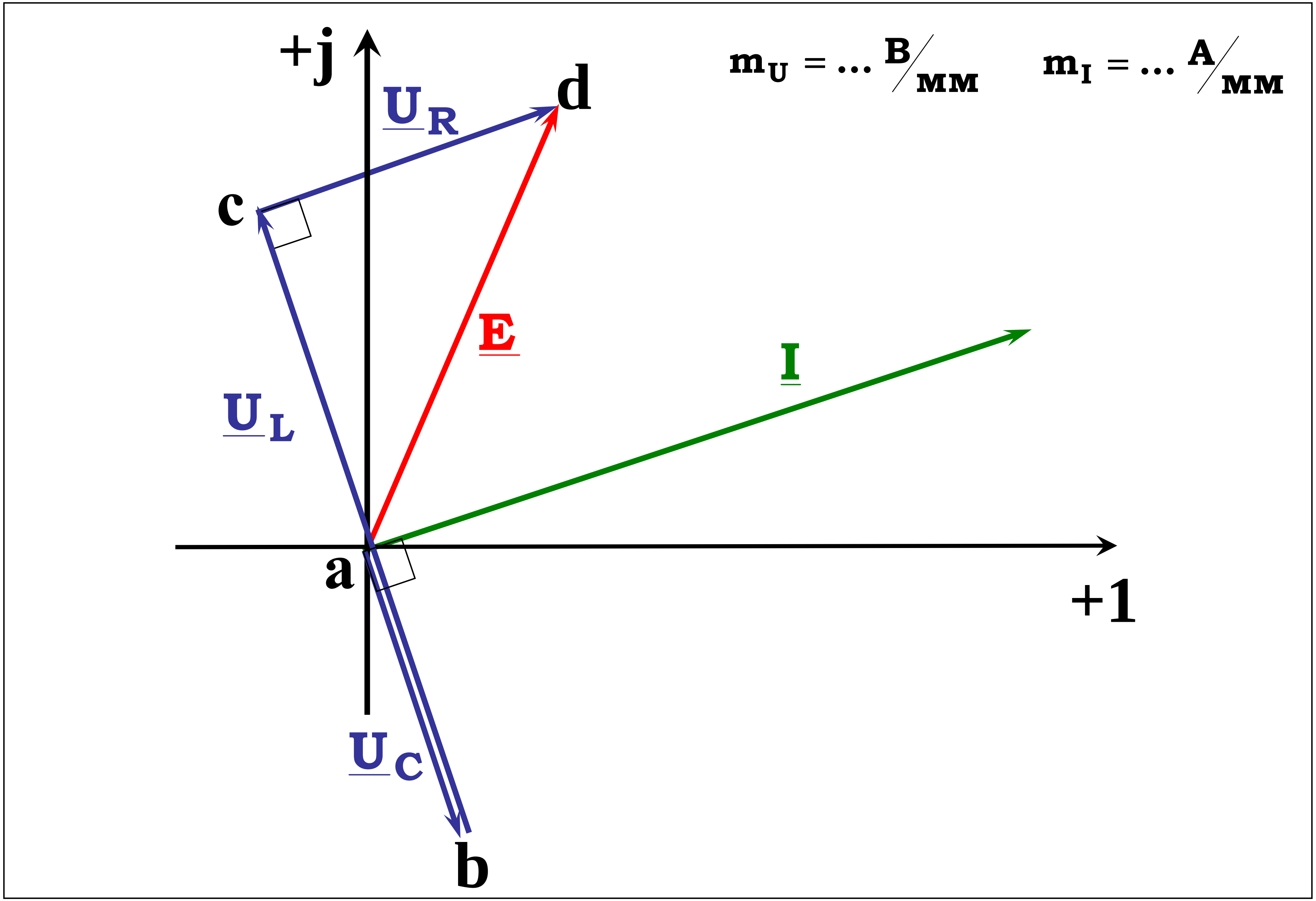




m_U = ... В/мм
m_I = ... А/мм
+j
I_L
I_R
I
d
U
I_C
I_R
E
c
+1
I_L

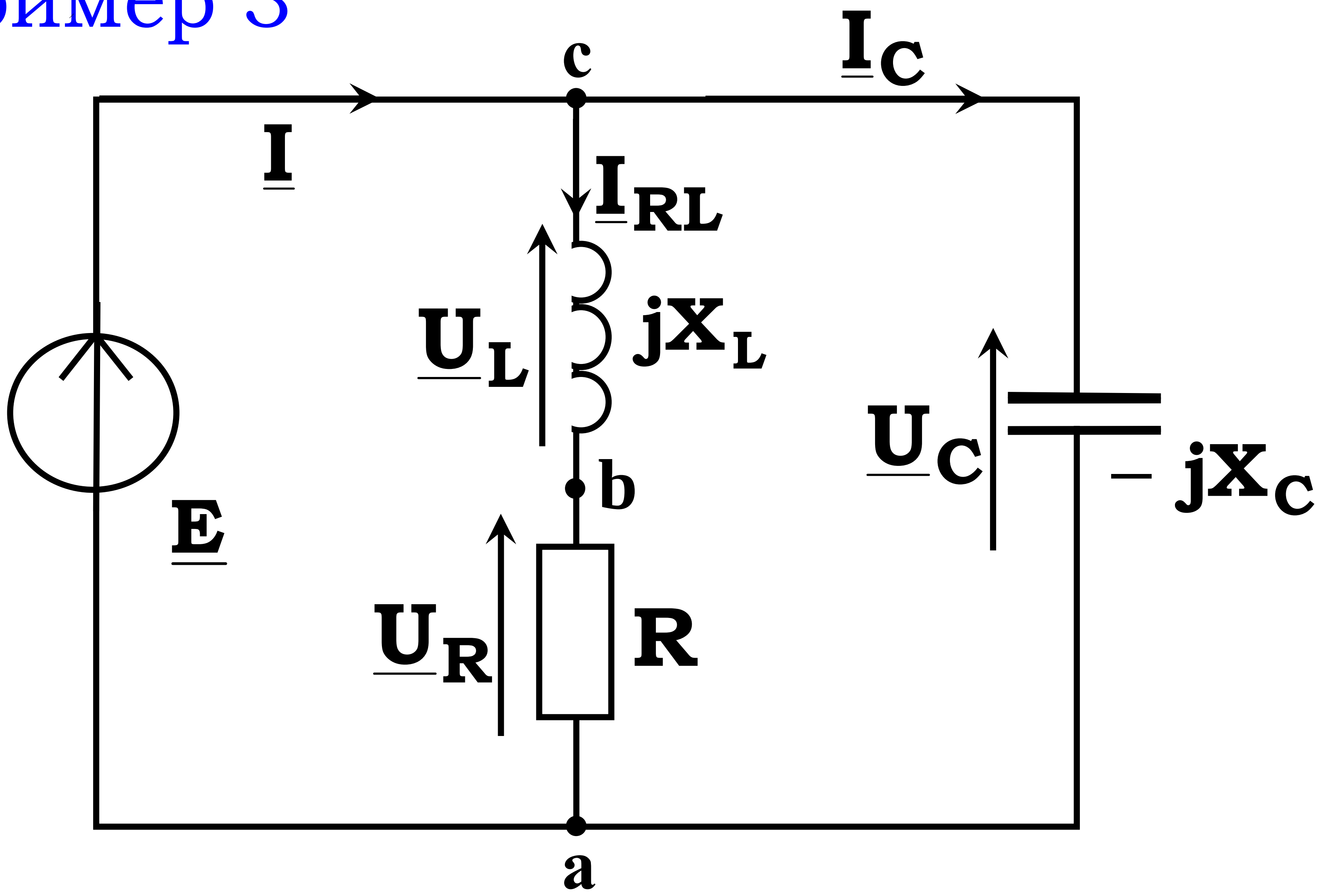
# Пример 2

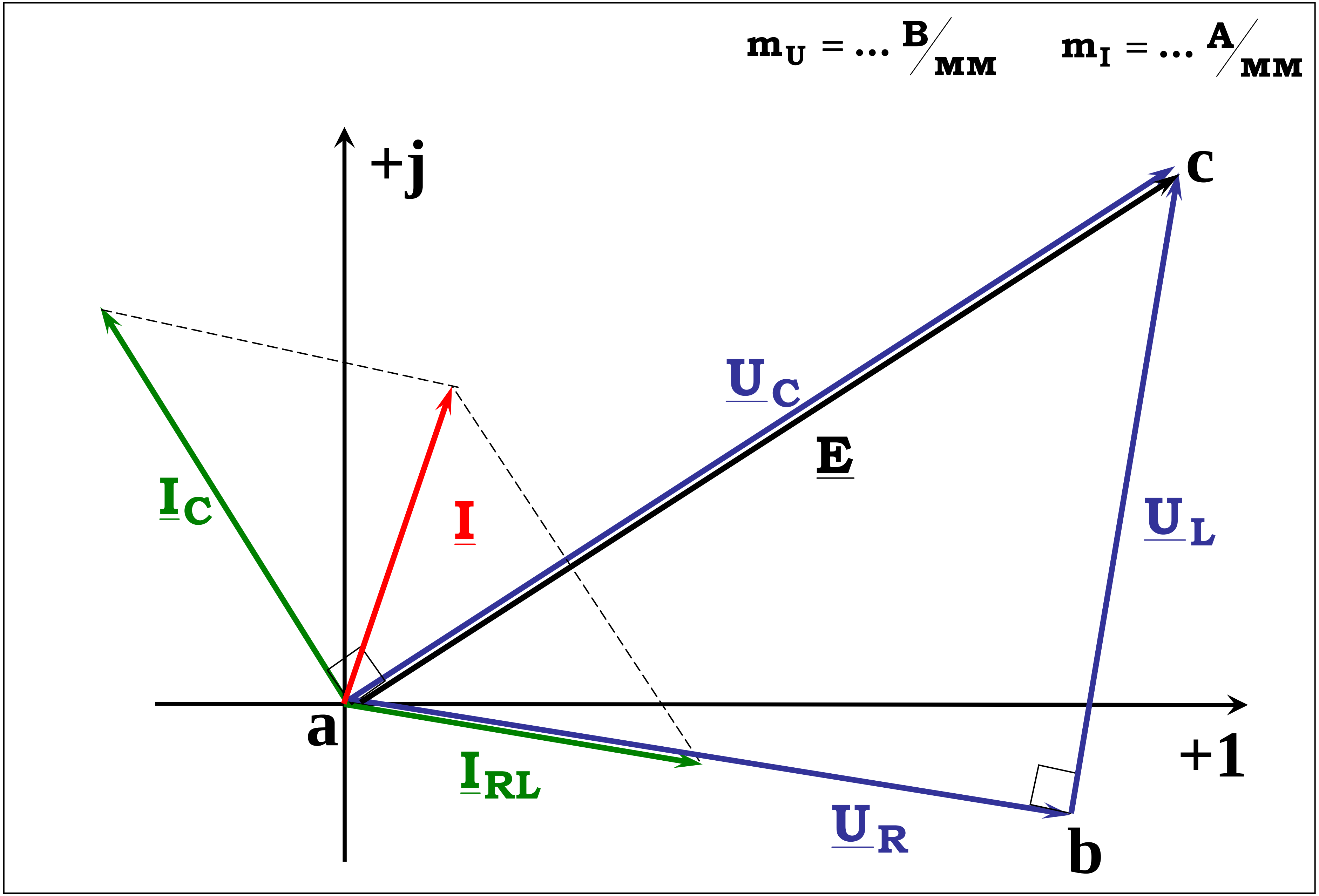




+j
$m_U = \ldots$ В/мм
$m_I = \ldots$ А/мм
d
$\underline{U}_R$
c
$\underline{E}$
$\underline{I}$
$\underline{U}_L$
a
+1
$\underline{U}_C$
b

# Пример 3





$m_U = \ldots$ В/мм
$m_I = \ldots$ А/мм
+j
c
$\underline{U}_C$
$\underline{E}$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}$
$\underline{U}_L$
a
+1
$\underline{I}_{RL}$
$\underline{U}_R$
b