

Соединения проводников

Темы кодификатора ЕГЭ: параллельное и последовательное соединение проводников, смешанное соединение проводников.

Есть два основных способа соединения проводников друг с другом — это *последовательное* и *параллельное* соединения. Различные комбинации последовательного и параллельного соединений приводят к *смешанному* соединению проводников.

Мы будем изучать свойства этих соединений, но сначала нам понадобится некоторая вводная информация.

Проводник, обладающий сопротивлением R , мы называем *резистором* и изображаем следующим образом (рис. 1):

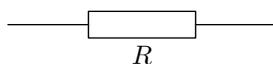


Рис. 1. Резистор

Напряжение на резисторе — это разность потенциалов стационарного электрического поля между концами резистора. Между какими именно концами? В общем-то, это неважно, но обычно удобно согласовывать разность потенциалов с направлением тока.

Ток в цепи течёт от «плюса» источника к «минусу». В этом направлении потенциал стационарного поля убывает. Напомним ещё раз, почему это так.

Пусть положительный заряд q перемещается по цепи из точки a в точку b , проходя через резистор R (рис. 2):

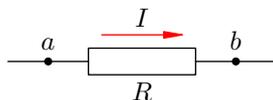


Рис. 2. $U = \varphi_a - \varphi_b$

Стационарное поле совершает при этом положительную работу $A = q(\varphi_a - \varphi_b)$. Так как $q > 0$ и $A > 0$, то и $\varphi_a - \varphi_b > 0$, т. е. $\varphi_a > \varphi_b$.

Поэтому напряжение на резисторе мы вычисляем как разность потенциалов в направлении тока: $U = \varphi_a - \varphi_b$.

Сопротивление подводящих проводов обычно пренебрежимо мало; на электрических схемах оно считается равным нулю. Из закона Ома следует тогда, что потенциал не меняется вдоль провода: ведь если $\varphi_a - \varphi_b = IR$ и $R = 0$, то $\varphi_a = \varphi_b$ (рис. 3):

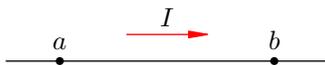


Рис. 3. $U = \varphi_a - \varphi_b$

Таким образом, при рассмотрении электрических цепей мы пользуемся идеализацией, которая сильно упрощает их изучение. А именно, мы считаем, что *потенциал стационарного поля изменяется лишь при переходе через отдельные элементы цепи, а вдоль каждого соединительного провода остаётся неизменным*. В реальных цепях потенциал монотонно убывает при движении от положительной клеммы источника к отрицательной.

Последовательное соединение

При *последовательном соединении* проводников конец каждого проводника соединяется с началом следующего за ним проводника.

Рассмотрим два резистора R_1 и R_2 , соединённых последовательно и подключённых к источнику постоянного напряжения U (рис. 4). Напомним, что положительная клемма источника обозначается более длинной чертой, так что ток в данной схеме течёт по часовой стрелке.

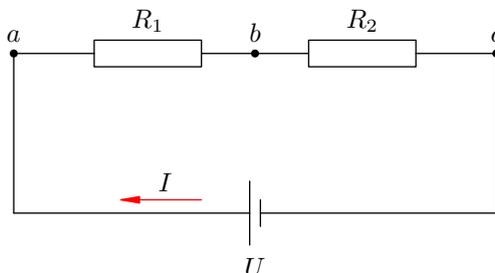


Рис. 4. Последовательное соединение

Сформулируем основные свойства последовательного соединения и проиллюстрируем их на этом простом примере.

1. При последовательном соединении проводников сила тока в них одинакова.

В самом деле, через любое поперечное сечение любого проводника за одну секунду будет проходить один и тот же заряд. Ведь заряды нигде не накапливаются, из цепи наружу не уходят и не поступают в цепь извне.

2. Напряжение на участке, состоящем из последовательно соединённых проводников, равно сумме напряжений на каждом проводнике.

Действительно, напряжение U_{ab} на участке ab — это работа поля по переносу единичного заряда из точки a в точку b ; напряжение U_{bc} на участке bc — это работа поля по переносу единичного заряда из точки b в точку c . Складываясь, эти две работы дадут работу поля по переносу единичного заряда из точки a в точку c , то есть напряжение U на всём участке: $U = U_{ab} + U_{bc}$.

Можно и более формально, без всяких словесных объяснений:

$$U = U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = (\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_c) = U_{ab} + U_{bc}.$$

3. Сопротивление участка, состоящего из последовательно соединённых проводников, равно сумме сопротивлений каждого проводника.

Пусть R — сопротивление участка ac . По закону Ома имеем:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_{ab} + U_{bc}}{I} = \frac{U_{ab}}{I} + \frac{U_{bc}}{I} = R_1 + R_2,$$

что и требовалось.

Можно дать интуитивно понятное объяснение правила сложения сопротивлений на одном частном примере. Пусть последовательно соединены два проводника из одинакового вещества и с одинаковой площадью поперечного сечения S , но с разными длинами l_1 и l_2 . Сопротивления проводников равны:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}, \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}.$$

Эти два проводника образуют единый проводник длиной $l_1 + l_2$ и сопротивлением

$$R = \rho \frac{l_1 + l_2}{S} = \rho \frac{l_1}{S} + \rho \frac{l_2}{S} = R_1 + R_2.$$

Но это, повторяем, лишь частный пример. Сопротивления будут складываться и в самом общем случае — если различны также вещества проводников и их поперечные сечения. Доказательство этого даётся с помощью закона Ома, как показано выше.

Наши доказательства свойств последовательного соединения, приведённые для двух проводников, переносятся без существенных изменений на случай произвольного числа проводников.

Параллельное соединение

При *параллельном соединении* проводников их начала подсоединяются к одной точке цепи, а концы — к другой точке.

Снова рассматриваем два резистора, на сей раз соединённые параллельно (рис. 5).

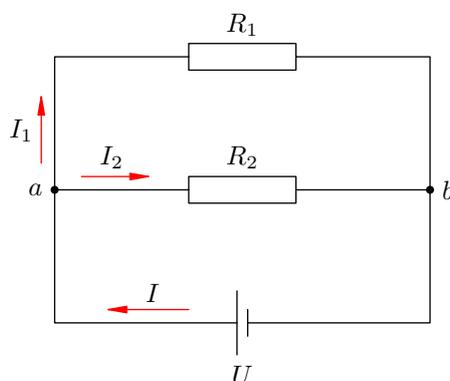


Рис. 5. Параллельное соединение

Резисторы подсоединены к двум точкам: a и b . Эти точки называются *узлами* или *точками разветвления* цепи. Параллельные участки называются также *ветвями*; участок от b к a (по направлению тока) называется *неразветвлённой частью* цепи.

Теперь сформулируем свойства параллельного соединения и докажем их для изображённого выше случая двух резисторов.

1. *Напряжение на каждой ветви одинаково и равно напряжению на неразветвлённой части цепи.*

В самом деле, оба напряжения U_1 и U_2 на резисторах R_1 и R_2 равны разности потенциалов между точками подключения:

$$U_1 = U_2 = \varphi_a - \varphi_b = U.$$

Этот факт служит наиболее отчётливым проявлением потенциальности стационарного электрического поля движущихся зарядов.

2. *Сила тока в неразветвлённой части цепи равна сумме сил токов в каждой ветви.*

Пусть, например, в точку a за время t из неразветвлённого участка поступает заряд q . За это же время t из точки a к резистору R_1 уходит заряд q_1 , а к резистору R_2 — заряд q_2 .

Ясно, что $q = q_1 + q_2$. В противном случае в точке a накапливался бы заряд, меняя потенциал данной точки, что невозможно (ведь ток постоянный, поле движущихся зарядов стационарно, и потенциал каждой точки цепи не меняется со временем). Тогда имеем:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{q_1 + q_2}{t} = \frac{q_1}{t} + \frac{q_2}{t} = I_1 + I_2,$$

что и требовалось.

3. *Величина, обратная сопротивлению участка параллельного соединения, равна сумме величин, обратных сопротивлениям ветвей.*

Пусть R — сопротивление разветвлённого участка ab . Напряжение на участке ab равно U ; ток, текущий через этот участок, равен I . Поэтому:

$$\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}.$$

Сокращая на U , получим:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (1)$$

что и требовалось.

Как и в случае последовательного соединения, можно дать объяснение данного правила на частном примере, не обращаясь к закону Ома.

Пусть параллельно соединены проводники из одного вещества с одинаковыми длинами l , но разными поперечными сечениями S_1 и S_2 . Тогда это соединение можно рассматривать как проводник той же длины l , но с площадью сечения $S = S_1 + S_2$. Имеем:

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{\rho l} = \frac{S_1 + S_2}{\rho l} = \frac{S_1}{\rho l} + \frac{S_2}{\rho l} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Приведённые доказательства свойств параллельного соединения без существенных изменений переносятся на случай любого числа проводников.

Из соотношения (1) можно найти R :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

К сожалению, в общем случае n параллельно соединённых проводников компактного аналога формулы (2) не получается, и приходится довольствоваться соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (3)$$

Тем не менее, один полезный вывод из формулы (3) сделать можно. Именно, пусть сопротивления всех n резисторов одинаковы и равны R_1 . Тогда:

$$\frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_1}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{R_1},$$

откуда

$$R = \frac{R_1}{n}.$$

Мы видим, что сопротивление участка из n параллельно соединённых одинаковых проводников в n раз меньше сопротивления одного проводника.

Смешанное соединение

Смешанное соединение проводников, как следует из названия, может являться совокупностью любых комбинаций последовательного и параллельного соединений, причём в состав этих соединений могут входить как отдельные резисторы, так и более сложные составные участки.

Расчёт смешанного соединения опирается на уже известные свойства последовательного и параллельного соединений. Ничего нового тут уже нет: нужно только аккуратно расчленив данную схему на более простые участки, соединённые последовательно или параллельно.

Рассмотрим пример смешанного соединения проводников (рис. 6).

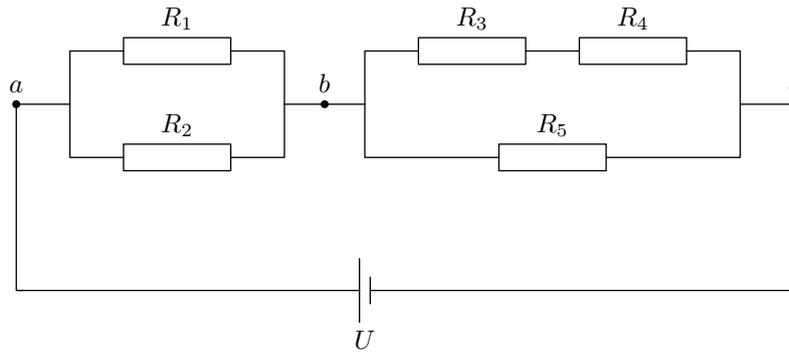


Рис. 6. Смешанное соединение

Пусть $U = 14$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 2$ Ом. Найдём силу тока в цепи и в каждом из резисторов.

Наша цепь состоит из двух последовательно соединённых участков ab и bc . Сопротивление участка ab :

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1,2 \text{ Ом.}$$

Участок bc является параллельным соединением: два последовательно включённых резистора R_3 и R_4 подключены параллельно к резистору R_5 . Тогда:

$$R_{bc} = \frac{(R_3 + R_4)R_5}{(R_3 + R_4) + R_5} = \frac{(3 + 5) \cdot 2}{(3 + 5) + 2} = 1,6 \text{ Ом.}$$

Сопротивление цепи:

$$R = R_{ab} + R_{bc} = 1,2 + 1,6 = 2,8 \text{ Ом.}$$

Теперь находим силу тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{14}{2,8} = 5 \text{ А.}$$

Для нахождения тока в каждом резисторе вычислим напряжения на обоих участках:

$$U_{ab} = IR_{ab} = 5 \cdot 1,2 = 6 \text{ В;}$$

$$U_{bc} = IR_{bc} = 5 \cdot 1,6 = 8 \text{ В.}$$

(Заметим попутно, что сумма этих напряжений равна 14 В, т. е. напряжению в цепи, как и должно быть при последовательном соединении.)

Оба резистора R_1 и R_2 находятся под напряжением U_{ab} , поэтому:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ А;}$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{6}{3} = 2 \text{ А.}$$

(В сумме имеем 5 А, как и должно быть при параллельном соединении.)

Сила тока в резисторах R_3 и R_4 одинакова, так как они соединены последовательно:

$$I_3 = I_4 = \frac{U_{bc}}{R_3 + R_4} = \frac{8}{3 + 5} = 1 \text{ А.}$$

Стало быть, через резистор R_5 течёт ток $I_5 = I - I_3 = 5 - 1 = 4 \text{ А.}$